第四章: Sturm-Liouville 理论

定义 0.1 (Sturm-Liouville **本征值问题**) 对于给定区域 $\mathcal{D}$（可能是 $[a,b]$, $[a,+\infty)$, (a,∞), 或者 $(-\infty,+\infty)$ 等等，但本课程只关注 $\Omega=[a,b]$ 的情形）。对于 $\mathcal{D}$ 上的已知的函数 $k(x),q(x),\rho(x)$，其中 $k(x)$ 可微，施图姆-刘维尔本征值问题 (以下简称 S-L 问题) 为求常数 λ 和函数 y 满足如下形式的二阶常微分方程:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big]+q(x)y=\lambda\rho(x)y \tag{1}$$

当 $\rho>0$ 时，对于 $\mathcal{D}$ 上任意的二次可微函数 f，如下定义的算子 (函数到函数的映射) $\mathcal{L}_x$ 被称为 Sturm-Liouville 算子:

$$\mathcal{L}_x(f)=\frac{1}{\rho}\Big\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[k(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\big]+qf\Big\} \tag{2}$$

一个完整的求解本征值的问题应该还附带对解在 $\mathcal{D}$ 边界上的要求，俗称边界条件。所谓的施图姆-刘维尔理论，即在 k,q,ρ 以及边界条件满足特定条件 (以下称之为正则性) 时，对 S-L 问题的解所普遍具有的数学性质的描述。

首先我们证明，S-L 方程左边的部分并不是一个特别特殊的情形。

定理 0.1 对于如下形式的一般二阶常微分方程:

$$fy''+gy'+hy=0, \tag{3}$$

如果 $f(x)\neq0$，则可以将其等价地变换为

$$-(py')'+qy=0 \tag{4}$$

的形式。

证明: 考虑在方程(3) 两边同时乘以函数 $m(x)$，m 待定，使得存在某个函数 F, $mf=F, mg=F'$。然后方程(3) 就可以转化为

$$(Fy')'+mhy=0。 \tag{5}$$

为了确定 F，我们发现

$$\frac{mg}{mf} = \frac{F'}{F} = (\ln F)' \tag{6}$$

由此我们得出

$$F(x) = \exp\{\int_a^x \frac{g(t)}{f(t)}dt\} \tag{7}$$

相应的，$m(x) = \frac{1}{f(x)} \exp\{\int_a^x \frac{g(t)}{f(t)}dt\}$

1 常微分方程的一些基本结论

定理 1.1 (**常微分方程的解的存在和唯一性定理**) 对于定义在实数轴上的 n 维常微分方程

$$y' = F(x, y(x)),\ y(x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \text{或}\ y(x) \in \Omega \subset \mathbb{C}^n, x \in [a,b] \subset \mathbb{R}, \tag{8}$$

假设 F 是一个关于 x 连续, 且关于 y 利普希茨 (Lipschitz) 连续，即存在 $L > 0$，使得对任意的 $x \in [a,b]$, 以及任意的 $y_1, y_2 \in \Omega$，都有

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|. \tag{9}$$

则对于给定的 $x_0 \in [a,b]$ 以及初始值 $y(x_0) = y_0$，存在 x_0 的一个小邻域 $I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \bigcap [a,b]$, y 在区间 I 上有且仅有唯一解。

作业: 方程:

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0 \tag{10}$$

有两个不同的解：$y_1(x) = x^2/4$, $y_2(x) = 0$. 请阐明为什么定理 1.1 对此问题不适用。

注意对于给定的 λ, 方程(1)是一个二阶常微分方程。

定理 1.2 对于任意实数区间 $[a,b]$ 上的任意二阶常微分方程:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \tag{11}$$

假设其中 f, g, h 都是 $[a,b]$ 上的连续函数，则对于给定的初始值 $y(a) = \alpha$, $y'(a) = \beta$, 方程(11) 在 $[a,b]$ 上有唯一解。

证明: 令 $Y(x)=(y(x),y'(x))^\top$，则 Y 满足

$$Y'=AY+(0,h)^\top, \tag{12}$$

其中 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -f & g\end{pmatrix}$. 应用定理 1.1 可得结论。

推论: 对于方程(1), 假如闭区间 $[a_0,b_0]\subset\mathcal{D}$，并且对任意的 $x\in[a_0,b_0]$ 有 $k(x)\neq 0$。那么对于一个给定的 λ，方程(1) 的解空间限制在在 $[a_0,b_0]$ 上至多是 2 维。

注: 对于正则的（下文定义正则性）S-L 问题以及固定的 λ，由于边界条件的限制，方程(1)的解空间至多是一维的。但是对于非正则的 S-L 问题，其解空间有可能是 2 维，但维数不会超过 2。

2 正则的 S-L 问题

定义 2.1 一个 S-L 问题被称为正则的，如果 $\mathcal{D}=[a,b]$ 是一个闭区间，k,q,ρ,k' 都在 $\mathcal{D}$ 上连续，$k,\rho>0$，并且附带（齐次混合）边界条件:

$$\begin{cases}\alpha_0 y'(a)+\beta_0 y(a) &=0\\ \alpha_1 y'(b)+\beta_1 y(b) &=0\end{cases} \tag{13}$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ 都是实数，且 $\alpha_0^2+\beta_0^2>0$, $\alpha_1^2+\beta_1^2>0$。

正则的 S-L 本征值问题的解有一系列简洁漂亮的数学性质，类似于广义的三角函数。

3 正则 S-L 本征值问题的解的性质

对于正则的S-L 本征值问题，定义希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_0=\{\text{实数函数}y:\text{满足}\int_{\mathcal{D}}\rho(x)|y(x)|^2dx<\infty\}。\tag{14}$$

对于 $y_1,y_2\in\mathcal{H}_0$, 定义其内积为:

$$\langle y_1,y_2\rangle_0=\int_{\mathcal{D}}\rho(x)y_1(x)y_2(x)dx \tag{15}$$

对于式(2) 定义的 $\mathcal{L}_x$, 我们选取 $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_x)=\{f\in\mathcal{H}_0, f$二次可微，满足边界条件，且$f''\in\mathcal{H}_0\}=:\mathcal{H}_2$。此时 $\mathcal{L}_x:\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_x)\longrightarrow\mathcal{H}_0$ 具有以下性质:

(1) $\mathcal{L}_x$ 是对称算子；从而 $\mathcal{L}_x$ 的特征值都是实数，且属于不同特征值的特征向量一定正交。

(2) 假如 λ 是 $\mathcal{L}_x$ 的特征值，则其对应的特征向量空间一定是一维的，亦即不存在两个线性无关的特征向量对应于同一个特征值。如果边界条件是周期边界条件，则可能是两维。

(3) $\mathcal{L}_x$ 的特征值可以从小到大排列为：$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to +\infty$。其对应的特征向量 $y_1, y_2, ...$ 构成 $\mathcal{H}_0$ 的一组正交基。

(3)' 存在实数 M,$\mathcal{L}_x$ 的特征值都大于 M。

注: 如果 $\mathcal{L}_x = -\Delta$ 为拉普拉斯算子，对于合适的边界条件，很容易证明这三条性质，因为其特征向量就是三角函数。对于正则 S-L 算子 $\mathcal{L}_x$, 其第三条性质的数学证明比较复杂，本课程不要求掌握，本讲义只列出大概步骤。这四条性质对一类由偏微分方程衍生的算子也成立 (除了每个本征值对应的本征函数空间不一定是一维)。更进一步的，这些结果可以推广到黎曼流形上的偏微分方程的情形。这些理论在计算机视觉 (包括海洋学中的相关问题) 领域中都有直接的应用。

证明: (**性质** (1) **的证明**:) 对于任意的 $y_1, y_2 \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_x)$, 分部积分两次可得:

$$\begin{aligned}
\langle y_1, \mathcal{L}_x y_2\rangle &= \int_{\mathcal{D}} y_1 \frac{1}{\rho}\{-(ky_2')' + qy_2\}\rho dx && (16)\\
&= \int_{\mathcal{D}} y_1\{-(ky_2')' + qy_2\}dx && (17)\\
&= \int_{\mathcal{D}} -y_1(ky_2')' + qy_1y_2 dx && (18)\\
&= - y_1ky_2'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} y_1'ky_2' + qy_1y_2dx && (19)\\
&= - y_1ky_2'\Big|_a^b + y_2ky_1'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} -y_2(ky_1')' + qy_1y_2dx && (20)\\
&= - y_1ky_2'\Big|_a^b + y_2ky_1'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} y_2\{-(ky_1')' + qy_1\}dx && (21)\\
&= - y_1ky_2'\Big|_a^b + y_2ky_1'\Big|_a^b + \langle Ly_1, y_2\rangle && (22)\\
&= k(b)\Big[y_1'(b)y_2(b) - y_1(b)y_2'(b)\Big] - k(a)\Big[y_1'(a)y_2(a) - y_1(a)y_2'(a)\Big]\\
&\quad + \langle \mathcal{L}_x y_1, y_2\rangle && (23)
\end{aligned}$$

正则 S-L 问题附带的边界条件可以等价的解读为向量 $(y_1(b), y_1'(b))$ 平行于 $(y_2(b), y_2'(b))$, 以及向量 $(y_1(a), y_1'(a))$ 平行于 $(y_2(a), y_2'(a))$。因此式(23) 中头两项为 0。

证明: (**性质（2）的证明**:) 假设 λ 为正则 S-L 算子 $\mathcal{L}_x$ 的一个特征值，而 y_1, y_2 为其两个线性无关的特征向量，即 y_1, y_2 同时满足

$$-(ky')' + qy = \lambda\rho y \tag{24}$$

以及边界条件

$$\alpha_0 y'(a) + \beta_0 y(a) = 0 \tag{25}$$

$$\alpha_1 y'(b) + \beta_1 y(b) = 0 \tag{26}$$

。由于 $p > 0$, 式(24) 可以展开并在等式两边同时除以 $-k$:

$$y'' + \frac{k'}{k}y' + \frac{\lambda\rho - q}{k}y = 0 \tag{27}$$

式(27)符合定理1.2中的条件，因此对于给定的初值向量 $\theta(a) = (y(a), y'(a))^\top$，方程(??)有唯一解。而正则 S-L 问题中的边界条件表明，y_1 和 y_2 对应的初值向量 θ_1 平行于 θ_2，由于方程(??)中的系数和 θ 无关，因此 $\theta_1(x)$ 始终平行于 $\theta_2(x)$, 且他们的长度之比始终为常数。因此存在常数 c, 使得 $y_1(x) = cy_2(x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上成立，和假设矛盾。

证明: (**性质（3）' 的证明**:) 设 λ 为 $\mathcal{L}_x$ 的一个本征值，相应的特征函数为 y。通过分部积分，推出：

$$\int_{\mathcal{D}} \lambda yy dx = \langle y, \mathcal{L}_x y\rangle \tag{28}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} y\Big\{ - (ky')' + qy\Big\}dx \tag{29}$$

$$= -\, yky'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[\Big]ky'y' + qyy\Big]dx \tag{30}$$

如果在边界上 $y = 0$ 或 $y' = 0$, 则显然由上式可以推出 $\lambda \geq \inf q(x)$。下面处理边界条件是混合齐次的情形，即 $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ 都不为 0 的情形。对于边界一边是混合齐次，而另一边是非混合齐次的情形，请读者自行思考。

对于边界两端都是混合齐次的情形，不妨假设 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$。构造一个 $\mathcal{D}$ 上的正值函数 h，使得 $h(x)$ 在端点 a 附近和 $e^{-\beta_0(x-a)}$ 吻合，而在端点 b 附近和 $e^{-\beta_1(x-b)}$ 吻合。$h(x)$ 只依赖于 β_0 和 β_1 的值，所以与 y 和 λ 无关。令 $u(x) = y(x)/h(x)$，则在端点处有：

$$u'(a) = \frac{y'(a)h(a) - y(a)h'(a)}{h^2(a)} = y'(a) + \beta_0 y(a) = 0 \tag{31}$$

$$u'(b) = \frac{y'(b)h(b) - y(b)h'(b)}{h^2(b)} = y'(b) + \beta_1 y(b) = 0 \tag{32}$$

由于 $y = hu$, 那么

$$\int_{\mathcal{D}} \lambda yy dx = -huk(hu)'\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[k(hu)'(hu)' + qh^2 uu\Big] dx \tag{33}$$

$$= -khu(h'u + hu')\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[k(h')^2 uu + khh'(uu' + uu') + kh^2 u'u' + qh^2 uu\Big] dx \tag{34}$$

$$= -khh'|u|^2\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} \Big[k(h')^2|u|^2 + kh^2|u'|^2 + khh'(|u|^2)' + qh^2|u|^2\Big] dx \tag{35}$$

$$= -khh'|u|^2\Big|_a^b + khh'|u|^2\Big|_a^b + \int_{\mathcal{D}} [k(h')^2 + qh^2 - (khh')']|u|^2 + kh^2|u'|^2 dx \tag{36}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} [k(h')^2 + qh^2 - (khh')']|u|^2 + kh^2|u'|^2 dx \tag{37}$$

$$\geq \Big\{ \inf \frac{(k(h')^2 + qh^2 - (khh')')}{h^2} \Big\} \int_{\mathcal{D}} h^2|u|^2 dx \tag{38}$$

$$= \Big\{ \inf \frac{k(h')^2 + qh^2 - (khh')'}{h^2} \Big\} \int_{\mathcal{D}} yy dx \tag{39}$$

故

$$\lambda \geq \inf \frac{k(h')^2 + qh^2 - (khh')'}{h^2} \tag{40}$$

证明: (**性质** (3) **的证明概要**：) 以下用红色标注的文字都是需要添加细节的地方，有的留给读者思考，有的暂时超出本课程范围，故省略。定义第二个希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_2 = \{f\text{二阶可微} : f \text{ 满足相应的边界条件，且} f'' \in \mathcal{H}\} \tag{41}$$

以及相应的内积 $\langle f, g\rangle_2 = \langle \mathcal{L}_x f, \mathcal{L}_x g\rangle + \langle f, g\rangle$

定义如下范数：

$$\|y\| = \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{42}$$

首先，$\mathcal{L}_x$ 存在逆算子$\mathcal{L}_x^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_2$. 可以证明 $\mathcal{L}_x^{-1}$ 是对称算子。然后证明存在 $y_1 \in \mathcal{H}_0$ 使得 $\|\mathcal{L}_x^{-1} y_1\| = \max_{y\in\mathcal{H}, \|y\|=1} \|\mathcal{L}_x^{-1} y\|$. 可以证明, 对任意的 $h \in \mathcal{H}$, $\langle y_1, h\rangle = 0 \iff \langle \mathcal{L}_x^{-1} y_1, \mathcal{L}_x^{-1} h\rangle = 0$. 因此如果 $\langle h, y_1\rangle = \langle h, \mathcal{L}_x^{-1} y_1\rangle = 0$, 则可推出 $\langle \mathcal{L}_x^{-1} h, y\rangle = \langle \mathcal{L}_x^{-1} h, \mathcal{L}_x^{-1} y_1\rangle = 0$. 由此证明存在正交分解 $\mathcal{H} = V_1 \bigoplus \mathcal{H}^{(1)}$, 其中 $V_1 = \mathrm{Span}\{y_1, \mathcal{L}_x^{-1} y_1\}$, 而 $\mathcal{L}_x^{-1}\mathcal{H}^{(1)} \subset \mathcal{H}^{(1)}$. 如果 V_1 是一维的，则我们已经证明 y_1 是 $\mathcal{L}_x$ 的本征向量。如果 V_1 维数为 2，则仍然不难证明 V_1 中存在两个正交的本征向量。这个过程可以持续进行下去。不难证明这些本征向量构成 $\mathcal{H}$ 的一组正交基。最后,$\lambda_i \to \infty$ 的性质可以通过比较 $\mathcal{L}_x$ 和拉普拉斯算子 Δ 得到。

作业: 举出一个正则 S-L 问题的例子，其中 $k, q, \rho > 0$ 并且存在负数本征值。写明方程和边界条件。提示：考虑 $y = e^{ax}$

作业: 阅读教材 195-196 页，找出其数学推导中的错误。

4 正则 S-L 本征值问题的应用

例: $\Omega = [0,1]$ 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,x) = \sin(x) \\ u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,1) = 0 \end{cases}$$

例: $\Omega = [a,b]$ 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(tx) \\ u(0,x) = (x-a)(x-b) \\ u(t,a) = 0, \quad u(t,b) = t \end{cases}$$

例: $\Omega = [a,b]$ 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(tx) \\ u(0,x) = (x-a)(x-b) \\ u(t,a) + u_x(t,a) = 0, \quad u(t,b) - 2u_x(t,b) = t \end{cases}$$

作业: 设 $\Omega = [a,b]$, 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(tx) \\ u(0,x) = (x-a)(x-b) \\ u(t,a) = 0, \quad u_x(t,b) = t \end{cases}$$

5 S-L 问题的级数解法: 常点情形

S-L 问题可以化为如下形式:

$$y'' + fy' + gy = 0, \tag{43}$$

其中 f, g 可能取值无穷大。S-L 理论描述了正则 S-L 问题的本征解的通性，但是对于一个具体的 S-L 问题，如果非正则或者 e_i 不容易求出，则 S-L 理论无法给出一个具体的数值解。假设我们想求本征解在点 $x_0 \in \mathcal{D}$ 附近的具体数值，当 f, g 都可以看成为复全纯或复半纯函数限制在实数轴上的函数时，我们可以假设本征函数 y 在 x_0 附近有洛朗展开 $y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - x_0)^k$，然后通过比较式(43) 左边逐项的系数得到 a_k 的递归关系。

最简单的非平凡情况当然是 f, g 都是解析函数时 (没有极点)，此时称 x_0 为 S-L 问题的一个常点。比如当 S-L 问题正则，且 k, q, ρ 都是 x_0 附近的解析函数时，此时 x_0 即为一个常点。为了求得 y 在 x_0 附近的表达式，假设

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{44}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x - x_0)^k \tag{45}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x - x_0)^k \tag{46}$$

首先，我们说明式(44)中不会出现负幂次，即 x_0 一定也是 y 的常点。

定理 5.1 当 x_0 为方程(43)的常点时，式(44)中 k 不能取负值，即 $y(x)$ 在 x_0 附近都有限。

证明: 令 $Y(x) = (y(x), y'(x))^\top$，则 Y 满足方程

$$Y' + AY = 0, \tag{47}$$

其中 $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ g(x) & f(x) \end{pmatrix}$ 方程(47)满足常微分方程解存在且唯一定理的条件。因此，若 y 在 x_0 附近有一点处有限，则在 x_0 附近全部有限。因此 x_0 不可能是 y 附近的奇点。

至此，我们可以假设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k。 \tag{48}$$

现在将式(48),(45),(46)同时代入方程(43)：

$$
\begin{aligned}
& y'' + fy' + gy \qquad (49) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}(x-x_0)^k + [\sum_{r=0}^{\infty} f_r(x-x_0)^r][\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)a_{s+1}(x-x_0)^s] \\
& + [\sum_{r=0}^{\infty} g_r(x-x_0)^r][\sum_{s=0}^{\infty} a_s(x-x_0)^s] \qquad (50) \\
= & \sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{r+s=k}(s+1)f_r a_{s+1} + \sum_{r+s=k} g_r a_s\right\}(x-x_0)^k \qquad (51)
\end{aligned}
$$

上式必须为 0 函数。由此我们得到以下关于 a_k 的递归公式：

$$
\begin{aligned}
& \text{k=0} \Longrightarrow 2a_2 + \left\{f_0a_1\right\} + \left\{g_0a_0\right\} = 0 \qquad (52) \\
& \text{k=1} \Longrightarrow 6a_3 + \left\{2f_0a_2 + f_1a_1\right\} + \left\{g_1a_0 + g_0a_1\right\} = 0 \qquad (53) \\
& \text{k=2} \Longrightarrow 12a_4 + \left\{3f_0a_3 + 2f_1a_2 + f_2a_1\right\} + \left\{g_2a_0 + g_1a_1 + g_0a_2\right\} = 0 \qquad (54) \\
& \vdots \qquad (55)
\end{aligned}
$$

因此，对于给定的 a_0, a_1, 后面的系数 $a_2, \ldots$ 都可以唯一地确定。注意，$a_0 = y(x_0), a_1 = y'(x_0)$，这和常微分方程的解的存在唯一性定理吻合。